basic education

Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE
SENIOR SERTIFIKAAT

GRAAD 12

WISKUNDE V2

NOVEMBER 2014

PUNTE: 150

TYD: 3 uur

Hierdie vraestel bestaan uit 14 bladsye, 6 diagramvelle en 1 inligtingblad.

Kopiereg voorbehou

INSTRUKSIES EN INLIGTING

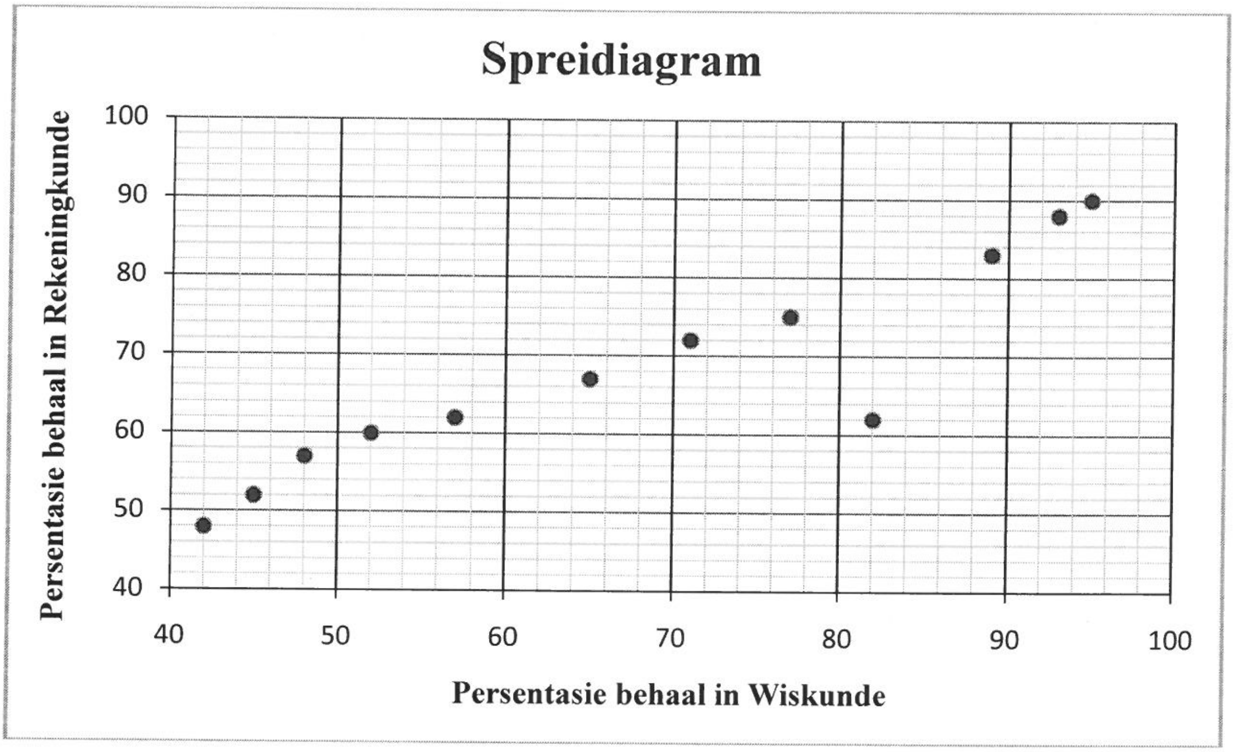
Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat die vrae beantwoord word.

1. Hierdie vraestel bestaan uit 10 vrae.
2. Beantwoord AL die vrae.
3. Dui ALLE berekeninge, diagramme, grafieke, ensovoorts wat jy gebruik het om die antwoorde te bepaal, duidelik aan.
4. Volpunte sal NIE noodwendig aan antwoorde alleen toegeken word NIE.
5. Jy mag 'n goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar (nieprogrammeerbaar en niegrafies) gebruik, tensy anders vermeld.
6. Indien nodig, rond antwoorde af tot TWEE desimale plekke, tensy anders vermeld.
7. SES diagramvelle vir VRAAG 2.2.1, 2.2.2, 7.4, 8.1, 8.2, 8.3, 9.1, 9.2 en 10 is aan die einde van hierdie vraestel aangeheg. Skryf jou sentrumnommer en eksamennommer op hierdie bladsye in die ruimtes wat voorsien is en plaas dit agterin jou ANTWOORDEBOEK.
8. Diagramme is NIE noodwendig volgens skaal geteken NIE.
9. Nommer die antwoorde korrek volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik word.
10. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

By 'n sekere skool neem slegs 12 kandidate Wiskunde en Rekeningkunde. Die punte, as 'n persentasie, wat deur hierdie kandidate in die voorbereidende eksamen in Wiskunde en Rekeningkunde behaal is, word in die tabel en spreidiagram hieronder getoon.

Wiskunde	52	82	93	95	71	65	77	42	89	48	45	57
Rekeningkunde	60	62	88	90	72	67	75	48	83	57	52	62



1.1 Bereken die gemiddelde persentasie van die Wiskunde-data. (2)

1.2 Bereken die standaardafwyking van die Wiskunde-data. (1)

1.3 Bepaal die getal kandidate wie se persentasie in Wiskunde binne EEN standaardafwyking vanaf die gemiddelde is. (3)

1.4 Bereken 'n vergelyking vir die kleinstekwadrate-regressielyn (lyn van beste passing) vir die data. (3)

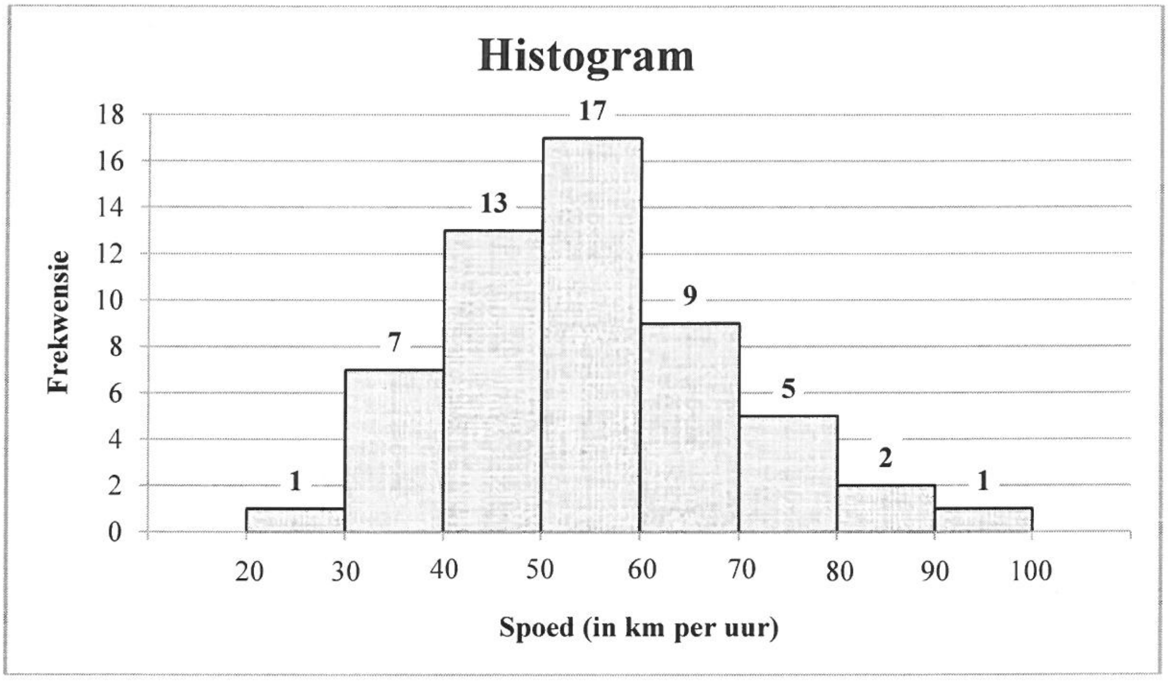
1.5 Indien 'n kandidaat uit hierdie groep 60% in die Wiskunde-eksamen behaal, maar vir die Rekeningkunde-eksamen afwesig was, voorspel, deur jou vergelyking in VRAAG 1.4 te gebruik, die persentasie wat hierdie kandidaat in die Rekeningkunde-eksamen sou behaal het. (Rond jou antwoord tot die NAASTE HEELGETAL af.) (2)

1.6 Gebruik die spreidiagram en identifiseer enige uitskieter(s) in die data. (1)

[12]

VRAAG 2

Die spoed van 55 motors wat deur 'n sekere gedeelte van 'n pad beweeg, word vir een uur gemonitor. Die spoedgrens op hierdie gedeelte van die pad is 60 km per uur. 'n Histogram is geskets om hierdie data voor te stel.



2.1 Identifiseer die modale klas van die data. (1)

2.2 Gebruik die histogram om:

2.2.1 Die kumulatiewefrekwensie-kolom in die tabel op DIAGRAMVEL 1 te voltooi (2)

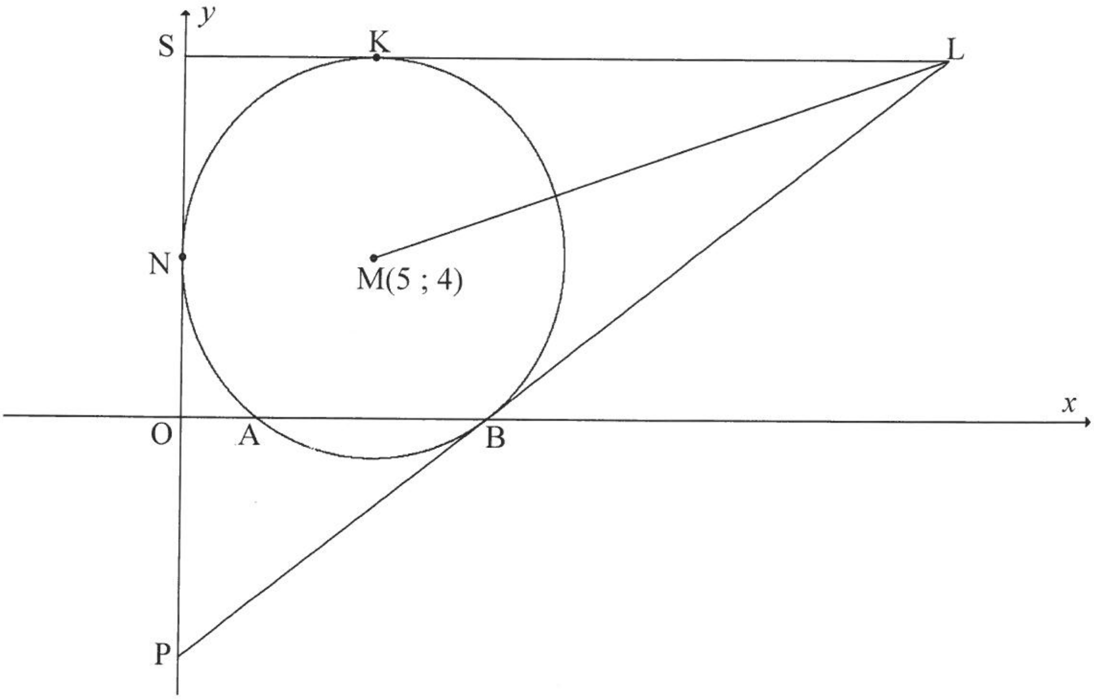
2.2.2 'n Ogief (kumulatiewefrekwensie-grafiek) van die data hierbo op die rooster op DIAGRAMVEL 1 te teken (3)

2.3 Die verkeersdepartement stuur spoedboetes aan alle motoriste wat 'n spoed van 66 km per uur oorskry. Skat die getal motoriste wat 'n spoedboete sal ontvang. (2)

[8]

VRAAG 3

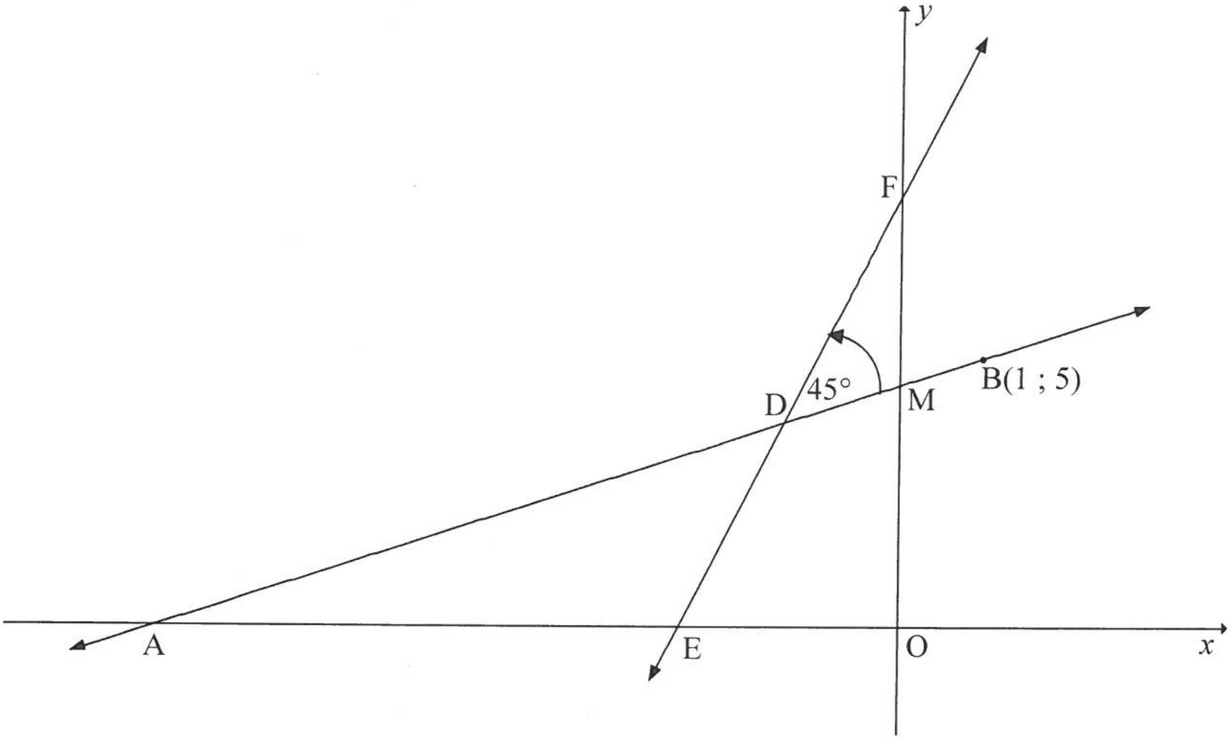
In die diagram hieronder raak 'n sirkel met middelpunt M(5 ; 4) die y-as by N en sny die x-as by A en B. PBL en SKL is raaklyne aan die sirkel waar SKL ewewydig aan die x-as en P en S punte op die y-as is. LM is getrek.



3.1	Skryf die lengte van die radius van die sirkel met middelpunt M neer.	(1)
3.2	Skryf die vergelyking van die sirkel met middelpunt M in die vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ neer.	(1)
3.3	Bereken die koördinate van A.	(3)
3.4	Indien (8 ; 0) die koördinate van B is, bereken:	
	3.4.1 Die gradiënt van MB	(2)
	3.4.2 Die vergelyking van die raaklyn PB in die vorm $y=mx+c$	(3)
3.5	Skryf die vergelyking van raaklyn SKL neer.	(2)
3.6	Toon aan dat L die punt (20 ; 9) is.	(2)
3.7	Bereken die lengte van ML in wortelvorm.	(2)
3.8	Bepaal die vergelyking van die sirkel wat deur punt K, L en M gaan in die vorm $(x-p)^2+(y-q)^2=c^2$	(5)
		[21]

VRAAG 4

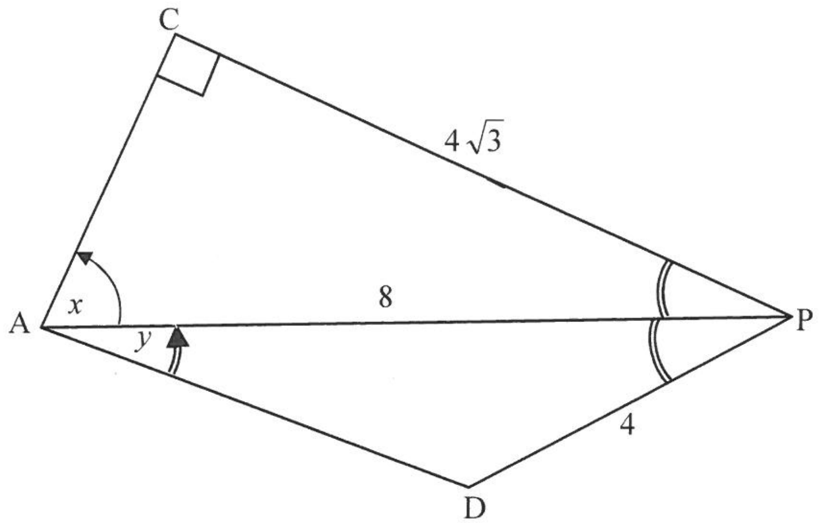
In die diagram hieronder is E en F onderskeidelik die x- en y-afsnit van die lyn met vergelyking $y = 3x + 8$. Die lyn deur B(1 ; 5) wat 'n hoek van 45° met EF vorm, soos hieronder aangetoon, het x- en y-afsnitte by A en M onderskeidelik .



4.1	Bepaal die koördinate van E.	(2)
4.2	Bereken die grootte van $D\hat{A}E$.	(3)
4.3	Bepaal die vergelyking van AB in die vorm $y = mx + c$.	(4)
4.4	Indien $x - 2y + 9 = 0$ die vergelyking van AB is, bepaal die koördinate van D.	(4)
4.5	Bereken die oppervlakte van vierhoek DMOE.	(6)
		[19]

VRAAG 5

In die figuur hieronder is ACP en ADP driehoeke met $\hat{C} = 90°$, $CP = 4\sqrt{3}$, $AP = 8$ en $DP = 4$. PA halveer $D\hat{P}C$. Gestel $C\hat{A}P = x$ en $D\hat{A}P = y$.



5.1 Toon aan, deur berekeninge, dat $x = 60°$. (2)

5.2 Bereken die lengte van AD. (4)

5.3 Bepaal y. (3)
[9]

VRAAG 6

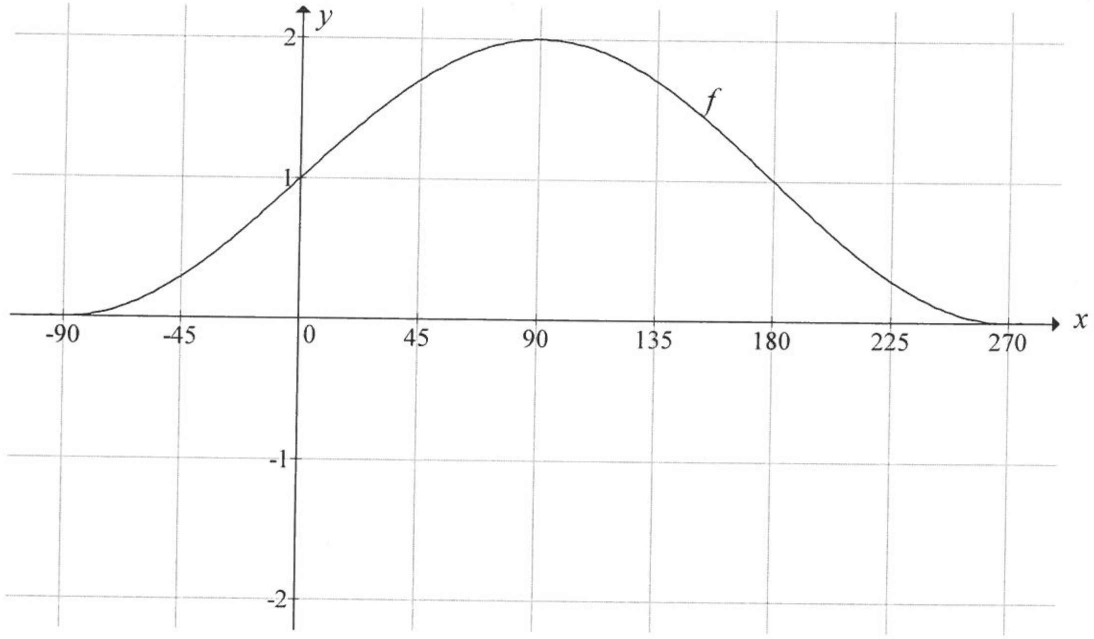
6.1 Bewys die identiteit: $\cos^2(180° + x) + \tan(x - 180°)\sin(720° - x)\cos x = \cos 2x$ (5)

6.2 Gebruik $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ om die formule vir $\sin(\alpha - \beta)$ af te lei. (3)

6.3 Indien $\sin 76° = x$ en $\cos 76° = y$, toon aan dat $x^2 - y^2 = \sin 62°$. (4)
[12]

VRAAG 7

In die diagram hieronder is die grafiek van $f(x) = \sin x + 1$ geskets vir $-90° \leq x \leq 270°$.



7.1 Skryf die waardeversameling van f neer. (2)

7.2 Toon aan dat $\sin x + 1 = \cos 2x$ as $(2\sin x + 1)\sin x = 0$ herskryf kan word. (2)

7.3 Bepaal vervolgens die algemene oplossing van $\sin x + 1 = \cos 2x$. (4)

7.4 Gebruik die rooster op DIAGRAMVEL 2 om die grafiek van $g(x) = \cos 2x$ vir $-90° \leq x \leq 270°$ te teken. (3)

7.5 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $f(x + 30°) = g(x + 30°)$ in die interval $-90° \leq x \leq 270°$. (3)

7.6 Beskou die volgende meetkundige reeks:

$1 + 2\cos 2x + 4\cos^2 2x + \ldots$

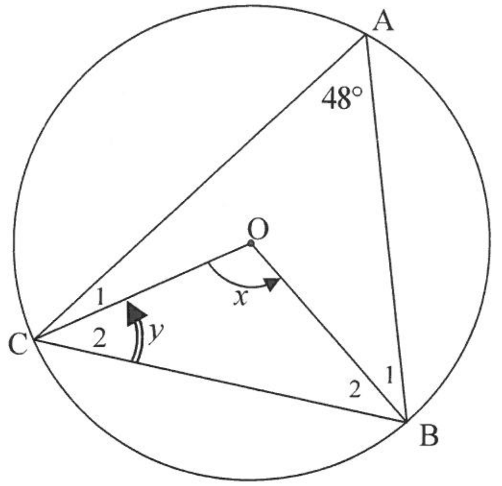
Gebruik die grafiek van g om te bepaal vir watter waarde(s) van x in die interval $0° \leq x \leq 90°$ hierdie reeks sal konvergeer. (5)

[19]

GEE REDES VIR JOU BEWERINGS IN VRAAG 8, 9 EN 10.

VRAAG 8

8.1 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel wat deur A, B en C gaan. $C\hat{A}B = 48°$, $C\hat{O}B = x$ en $\hat{C}_2 = y$.

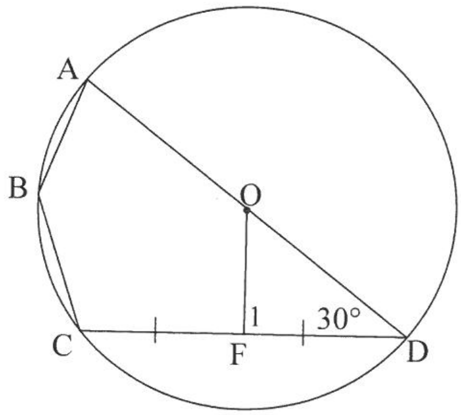


Bepaal, met redes, die grootte van:

8.1.1 x (2)

8.1.2 y (2)

8.2 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel wat deur A, B, C en D gaan. AOD is 'n reguitlyn en F is die middelpunt van koord CD. $O\hat{D}F = 30°$ en OF is verbind.

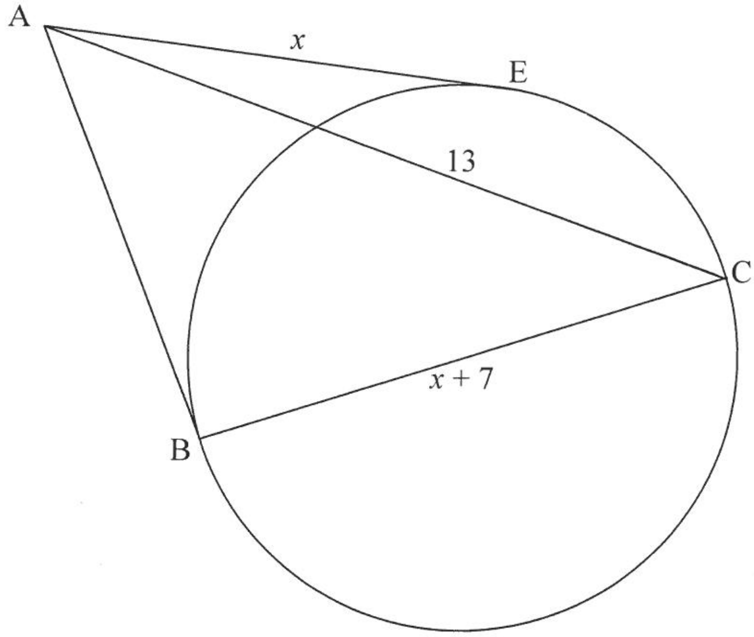


Bepaal, met redes, die grootte van:

8.2.1 $\hat{F}_1$ (2)

8.2.2 $A\hat{B}C$ (2)

8.3 In die diagram is AB en AE raaklyne aan die sirkel by B en E onderskeidelik. BC is 'n middellyn van die sirkel. AC = 13, AE = x en BC = $x + 7$.



8.3.1 Gee redes vir die bewerings hieronder.
Voltooi die tabel op DIAGRAMVEL 3.

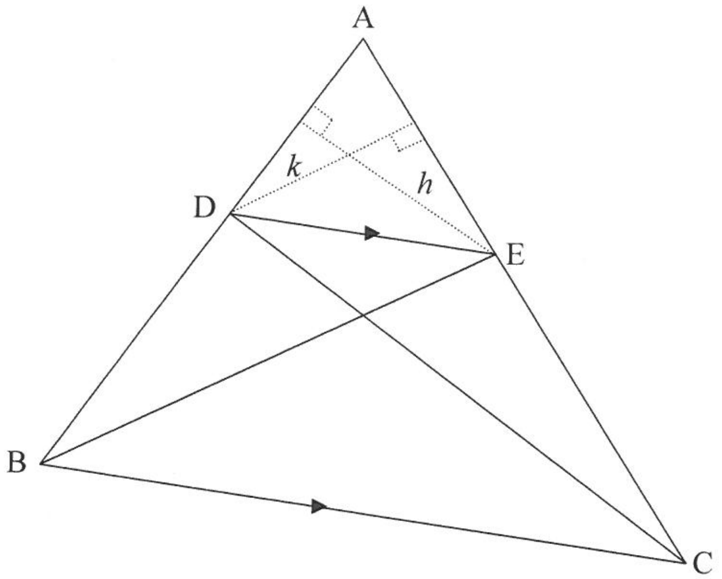
	Bewering	**Rede**
(a)	$A\hat{B}C = 90°$	
(b)	$AB = x$	

(2)

8.3.2 Bereken die lengte van AB. (4)
[14]

VRAAG 9

9.1 In die diagram lê punte D en E op sye AB en AC van ΔABC onderskeidelik sodat DE | | BC. DC en BE is verbind.



9.1.1 Verduidelik waarom die oppervlaktes van ΔDEB en ΔDEC gelyk is. (1)

9.1.2 Hieronder verskyn die gedeeltelik voltooide bewys van die stelling wat beweer dat indien in enige ΔABC die lyn DE | | BC dan is $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Gebruik die diagram hierbo en voltooi die bewys van die stelling op DIAGRAMVEL 4.

Konstruksie: Konstrueer die hoogtelyne (hoogtes) h en k in ΔADE.

$$\frac{\text{oppervlakte } \Delta ADE}{\text{oppervlakte } \Delta DEB} = \frac{\frac{1}{2}(AD)(h)}{\frac{1}{2}(BD)(h)} = \text{........}$$

$$\frac{\text{oppervlakte } \Delta ADE}{\text{oppervlakte } \Delta DEC} = \text{.....................} = \frac{AE}{EC}$$

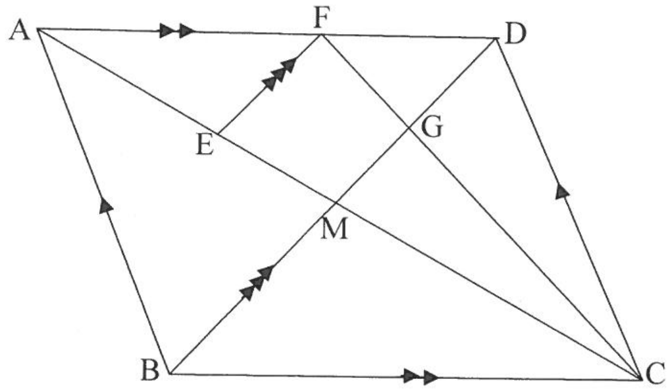
Maar oppervlakte ΔDEB = ... (rede: ....)

$$\therefore \frac{\text{oppervlakte } \Delta ADE}{\text{oppervlakte } \Delta DEB} = \text{..............................}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(5)

9.2 In die diagram is ABCD 'n parallelogram. Die hoeklyne van ABCD sny by M. F is 'n punt op AD sodat AF : FD = 4 : 3. E is 'n punt op AM sodat EF | | BD. FC en MD sny by G.



Bereken, met redes, die verhouding van:

9.2.1 $\dfrac{EM}{AM}$ (3)

9.2.2 $\dfrac{CM}{ME}$ (3)

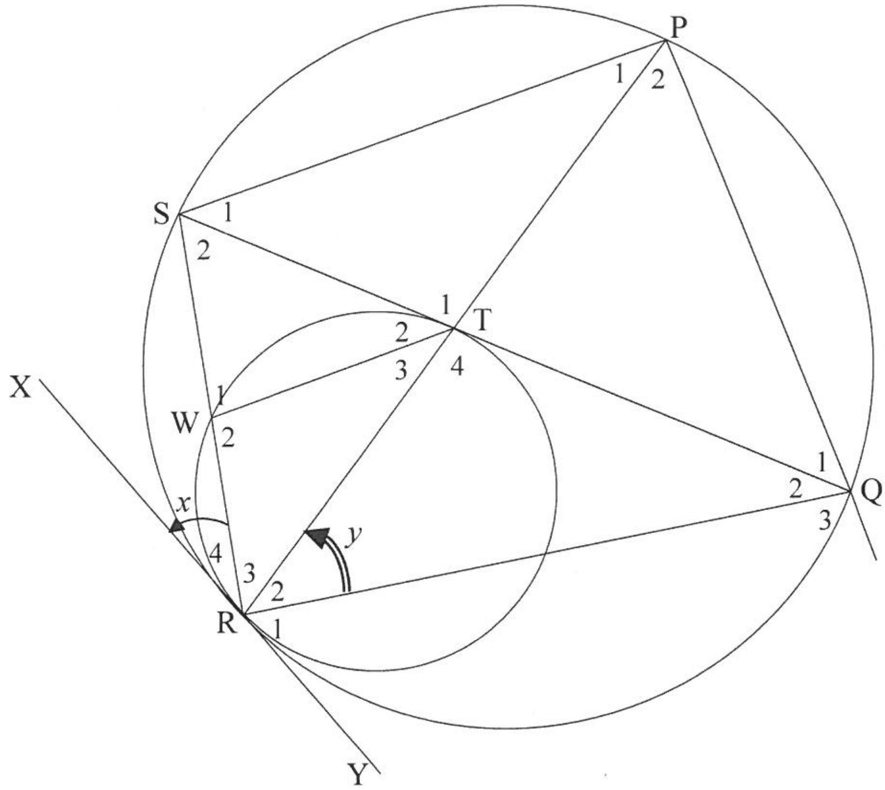
9.2.3 $\dfrac{\text{oppervlakte } \Delta FDC}{\text{oppervlakte } \Delta BDC}$ (4)

[16]

VRAAG 10

Die twee sirkels in die diagram het 'n gemeenskaplike raaklyn XRY by R. W is enige punt op die klein sirkel. Die reguitlyn RWS ontmoet die groter sirkel by S. Die koord STQ is 'n raaklyn aan die klein sirkel, met T as die raakpunt. Koord RTP is getrek.

Gestel $\hat{R}_4 = x$ en $\hat{R}_2 = y$



10.1 Gee redes vir die bewerings hieronder.
Voltooi die tabel op DIAGRAMVEL 6.

Gestel $\hat{R}_4 = x$ en $\hat{R}_2 = y$		
	Bewering	**Rede**
10.1.1	$\hat{T}_3 = x$	
10.1.2	$\hat{P}_1 = x$	
10.1.3	WT || SP	
10.1.4	$\hat{S}_1 = y$	
10.1.5	$\hat{T}_2 = y$	

(5)

10.2 Bewys dat $RT = \frac{WR.RP}{RS}$ (2)

10.3 Identifiseer, met redes, nog TWEE ander hoeke gelyk aan y. (4)

10.4 Bewys dat $\hat{Q}_3 = \hat{W}_2$. (3)

10.5 Bewys dat $\Delta RTS \parallel\!\mid \Delta RQP$. (3)

10.6 Bewys vervolgens dat $\frac{WR}{RQ} = \frac{RS^2}{RP^2}$. (3)

[20]

TOTAAL: 150

SENTRUMNOMMER:

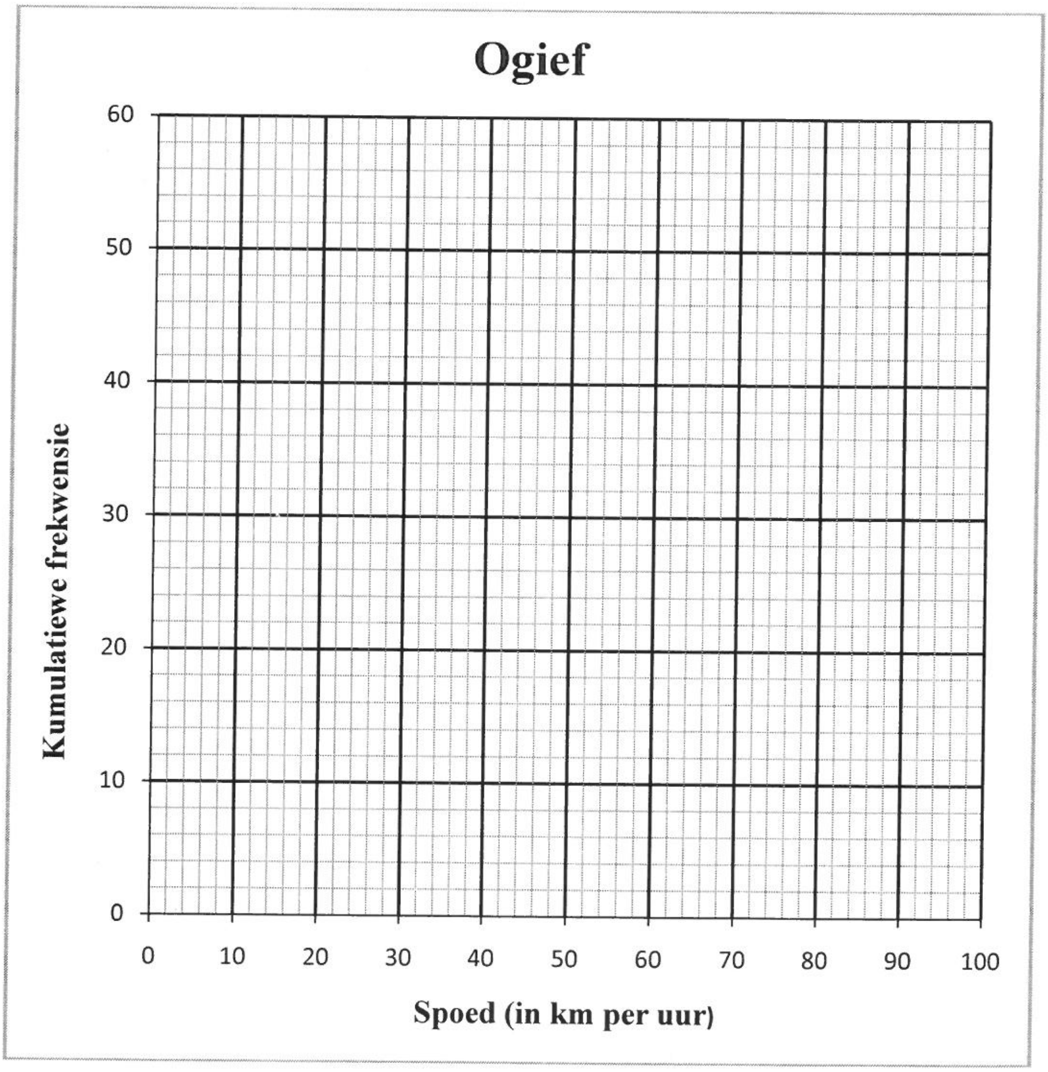
EKSAMENNOMMER:

DIAGRAMVEL 1

VRAAG 2.2.1

Klas	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
$20 < x \leq 30$	1	
$30 < x \leq 40$	7	
$40 < x \leq 50$	13	
$50 < x \leq 60$	17	
$60 < x \leq 70$	9	
$70 < x \leq 80$	5	
$80 < x \leq 90$	2	
$90 < x \leq 100$	1	

VRAAG 2.2.2



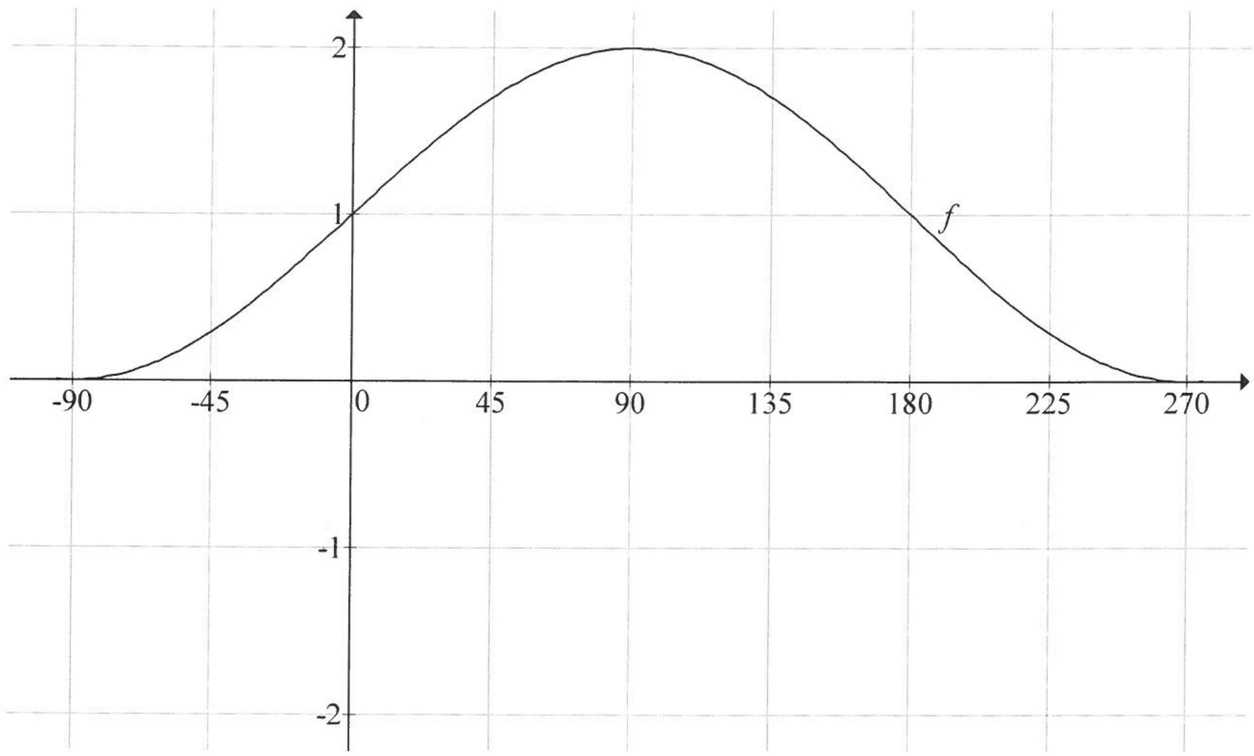
Kopiereg voorbehou

SENTRUMNOMMER:

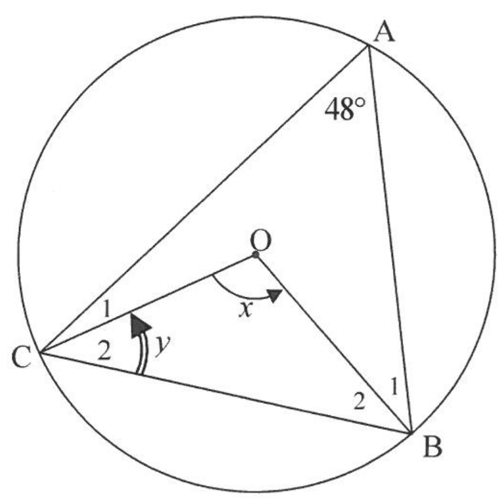
EKSAMENNOMMER:

DIAGRAMVEL 2

VRAAG 7.4



VRAAG 8.1



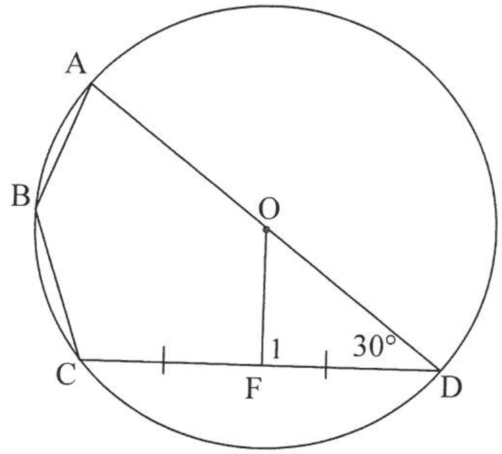
Kopiereg voorbehou

SENTRUMNOMMER: | | | | | | | | |

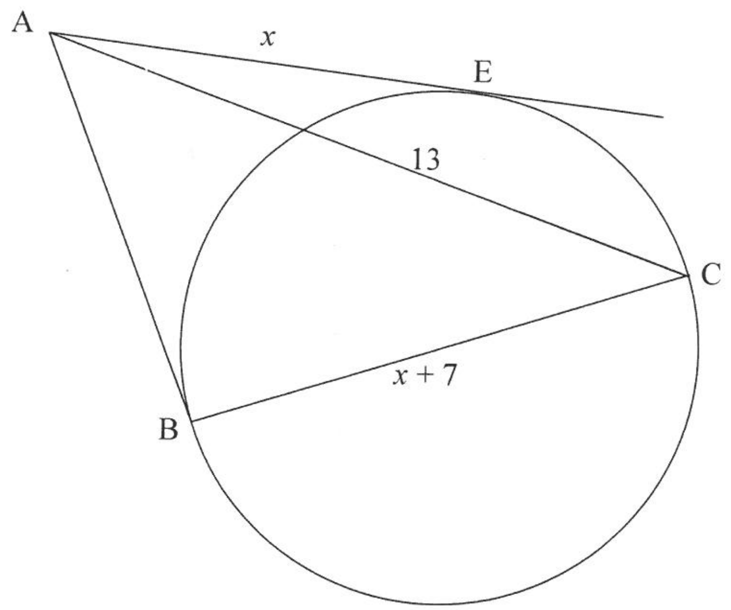
EKSAMENNOMMER: | | | | | | | | | | | | | |

DIAGRAMVEL 3

VRAAG 8.2



VRAAG 8.3



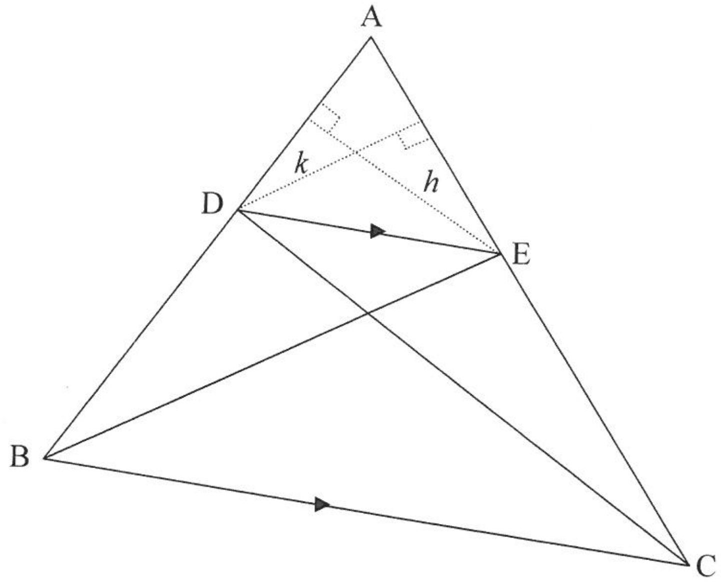
8.3.1	**Bewering**	**Rede**
(a)	$A\hat{B}C = 90°$	
(b)	$AB = x$	

SENTRUMNOMMER:

EKSAMENNOMMER:

DIAGRAMVEL 4

VRAAG 9.1



9.1.2 Konstruksie: Konstrueer hoogtelyne (hoogtes) h en k in ΔADE.

$$\frac{\text{oppervlakte } \Delta\text{ADE}}{\text{oppervlakte } \Delta\text{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}(\text{AD})(h)}{\frac{1}{2}(\text{BD})(h)} = \ldots\ldots$$

$$\frac{\text{oppervlakte } \Delta\text{ADE}}{\text{oppervlakte } \Delta\text{DEC}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\text{AE}}{\text{EC}}$$

Maar oppervlakte ΔDEB = ...

(rede: ....)

$$\therefore \frac{\text{oppervlakte } \Delta\text{ADE}}{\text{oppervlakte } \Delta\text{DEB}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}}$$

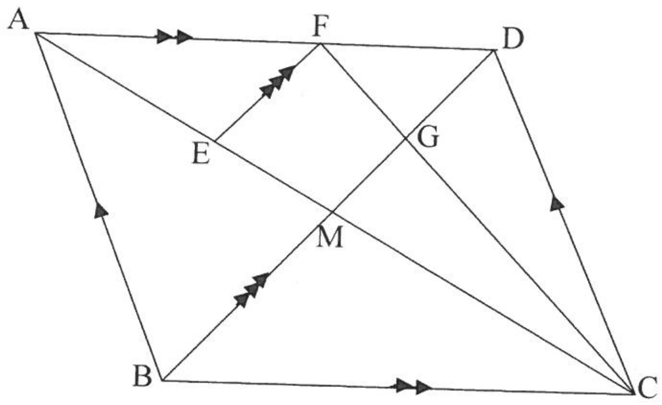
Kopiereg voorbehou

SENTRUMNOMMER:

EKSAMENNOMMER:

DIAGRAMVEL 5

VRAAG 9.2



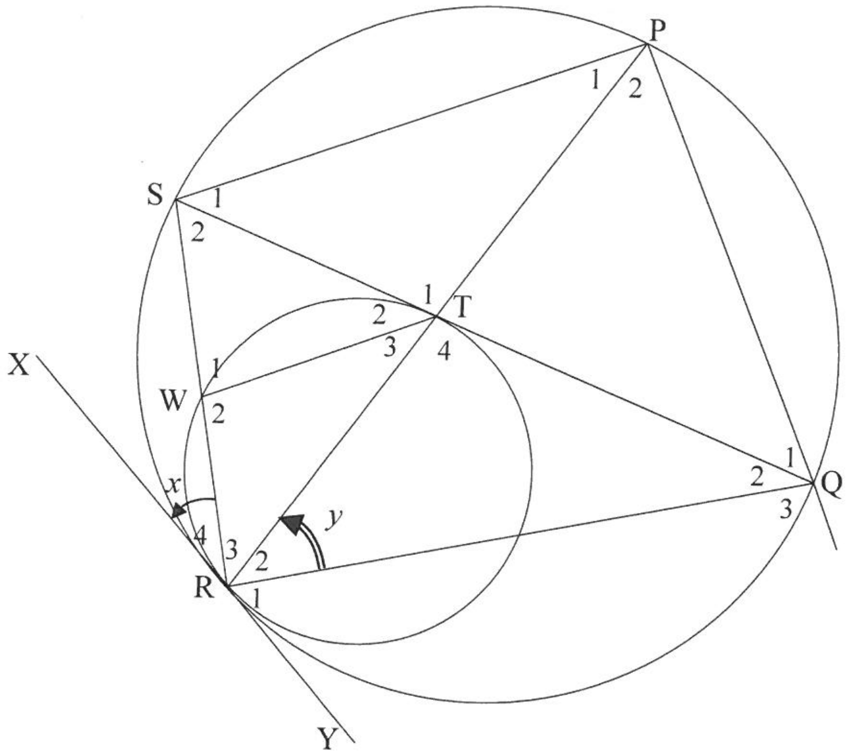
Kopiereg voorbehou

SENTRUMNOMMER:

EKSAMENNOMMER:

DIAGRAMVEL 6

VRAAG 10



Gestel $\hat{R}_4 = x$ en $\hat{R}_2 = y$		
	Bewering	**Rede**
10.1.1	$\hat{T}_3 = x$	
10.1.2	$\hat{P}_1 = x$	
10.1.3	WT | | SP	
10.1.4	$\hat{S}_1 = y$	
10.1.5	$\hat{T}_2 = y$	

INLIGTINGSBLAD

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$A = P(1+ni)$ $\quad$ $A = P(1-ni)$ $\quad$ $A = P(1-i)^n$ $\quad$ $A = P(1+i)^n$

$T_n = a + (n-1)d$ $\quad$ $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$T_n = ar^{n-1}$ $\quad$ $S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$; $r \neq 1$ $\quad$ $S_\infty = \frac{a}{1-r}$; $-1 < r < 1$

$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$ $\quad$ $P = \frac{x\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\quad$ $\mathrm{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$y = mx + c$ $\quad$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad$ $m = \tan\theta$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

In ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2}ab.\sin C$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$ $\quad$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ $\quad$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$ $\quad$ $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ $\quad$ $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$

$\hat{y} = a + bx$ $\quad$ $b = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2}$

Kopiereg voorbehou